Να αποδείξετε τα παρακάτω:

α) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

β) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

γ) $(A \cap B) - \Gamma = A \cap (B - \Gamma)$

δ) $(A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)$

ε) $\Gamma - (A \cap B) = (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B)$

στ) $\Gamma - (A \cup B) = (\Gamma - A) \cap (\Gamma - B)$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $A \subseteq B$ και θδο $A \cap B = A$.

ΓΕΝΙΚΑ, $A \cap B \subseteq A$ αρκεί νδο $A \subseteq A \cap B$.

Έστω, $x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$

Άρα, $A \subseteq A \cap B$, συνεπώς $A \cap B = A$

Αντίστροφα, Έστω $A \cap B = A$ και θδο $A \subseteq B$

ΓΕΝΙΚΑ $A \cap B \subseteq B \xRightarrow{A \cap B = A} A \subseteq B$.

β) Έστω $A \subseteq B$ και θδο $A \cup B = B$

ΓΕΝΙΚΑ, $B \subseteq A \cup B$ αρκεί νδο $A \cup B \subseteq B$

Έστω, $x \in (A \cup B) \xRightarrow{A \subseteq B} x \in (B \cup B) \Rightarrow x \in B$

Άρα, $A \cup B \subseteq B$, συνεπώς $A \cup B = B$

Αντίστροφα, Έστω $A \cup B = B$ και θδο $A \subseteq B$

ΓΕΝΙΚΑ $A \subseteq A \cup B \underset{A \cup B = B}{\Rightarrow} A \subseteq B$.

γ) Έστω $x \in [(A \cap B) - \Gamma] \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin \Gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}) \wedge \underbrace{x \notin \Gamma}_{r} \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge (\underbrace{x \in B}_{q} \wedge \underbrace{x \notin \Gamma}_{r}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in (B - \Gamma)) \Leftrightarrow x \in [A \cap (B - \Gamma)]$

δ) Έστω $x\in[(A\cup B)-\Gamma] \Leftrightarrow x\in(A\cup B) \wedge x\notin\Gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge x\notin\Gamma \Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\notin\Gamma) \vee (x\in B \wedge x\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow x\in(A-\Gamma) \vee x\in(B-\Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[(A-\Gamma)\cup(B-\Gamma)]$

$\left\{ \begin{array}{l} x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sim x\in(A\cap B) \overset{\text{D'Morgan}}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow x\notin A \vee x\in B \end{array} \right.$

ε) Έστω $x\in[\Gamma-(A\cap B)] \Leftrightarrow x\in\Gamma \wedge x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\Gamma \wedge (\sim x\in(A\cap B)) \overset{\text{D'Morgan}}{\Leftrightarrow} x\in\Gamma \wedge (x\notin A \vee x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in\Gamma \wedge x\notin A) \vee (x\in\Gamma \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(\Gamma-A) \vee x\in(\Gamma-B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[(\Gamma-A)\cup(\Gamma-B)]$

στ) Έστω $x\in[\Gamma-(A\cup B)] \Leftrightarrow x\in\Gamma \wedge x\notin(A\cup B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\Gamma \wedge (\sim x\in(A\cup B)) \Leftrightarrow x\in\Gamma \wedge (x\notin A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in\Gamma \wedge x\in\Gamma) \wedge (x\notin A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in\Gamma \wedge x\notin A) \wedge (x\in\Gamma \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(\Gamma-A) \wedge x\in(\Gamma-B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[(\Gamma-A)\cap(\Gamma-B)]$